ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---o0o---

VŨ MẠNH HÙNG

ĐIỀU KIỆN CẦN CẤP HAI CHO NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ KHÔNG TRƠN QUA ĐẠO HÀM PALÉS-ZEIDAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

VŨ MẠNH HÙNG

ĐIỀU KIỆN CẦN CẤP HAI CHO NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ KHÔNG TRƠN QUA ĐẠO HÀM PALÉS-ZEIDAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **8460112**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên, 10/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$I(\overline{x})$	tập các chỉ số ràng buộc tích cực
$\mathbb{R}^m_+$	orthant không âm của $\mathbb{R}^m$
$\mathbb{R}^m_{++}$	orthant dương của $\mathbb{R}^m$
$T_{\overline{x}}C$	nón tiếp tuyến của C tại $\overline{x}$
$T^2_{\overline{x}}C$	nón tiếp tuyến cấp 2 của C tại $\overline{x}$
$f^0(\overline{x}, v)$	đạo hàm suy rộng Clarke của f tại $\overline{x}$ theo phương v
$f^{00}(\overline{x}; v)$	đạo hàm suy rộng Palés–Zeidan cấp 2 của f tại $\overline{x}$ theo phương v
$f^{"}(\overline{x}; v)$	đạo hàm cấp 2 của f tại $\overline{x}$ theo phương v
$\nabla f(\overline{x})$	đạo hàm Fréchet của f tại $\overline{x}$
$\nabla^2 h(\overline{x})$	đạo hàm Fréchet cấp 2 (Hessian) của f tại $\overline{x}$
$Ker\nabla h(\overline{x})$	hạch của $\nabla h(\overline{x})$
(VEP)	bài toán cân bằng vectơ
$dimX$	số chiều của không gian X

Mở đầu

Bài toán cân bằng vectơ đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết các bài toán cực trị. Bài toán cân bằng vectơ bao gồm một số bài toán với các trường hợp đặc biệt như: bài toán tối ưu vectơ, bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và một số bài toán khác. Điều kiện tối ưu cấp 1, cấp 2 là hướng nghiên cứu quan trọng của bài toán cân bằng vectơ và bài toán tối ưu vectơ. Mới đây, E. Constantin ([3], 2015) đã nghiên cứu các điều kiện cấp 2 cho bài toán tối ưu vô hướng với ràng buộc bất đẳng thức, D.V.Luu ([6], 2018) đã thiết lập các điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập. Điều kiện tối ưu cấp 2 dưới ngôn ngữ các đạo hàm cấp 2 khác nhau của các hàm không trơn là đề tài được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Do vậy, chúng tôi chọn đề tài "Điều kiện cần cấp hai cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ không trơn qua đạo hàm Palés–Zeidan".

Luận văn trình bày các kết quả của D.V.Luu đăng trên tạp chí *Journal of Global Optimization* **70**(2018), 437-453 về các điều kiện cần Fritz John dạng nguyên thủy và đối ngẫu cho bài toán cân bằng vectơ không trơn có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập dưới ngôn ngữ đạo hàm theo phương cấp 2 Palés–Zeidan. Các điều kiện Karush–Kuhn–Tucker dạng đối ngẫu được trình bày với các điều kiện chính quy cấp 2 thích hợp.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.
Chương 1 "Điều kiện cần cấp 2 dạng nguyên thủy cho nghiệm hữu hiệu yếu" trình bày các khái niệm đạo hàm cấp 1, cấp 2 theo phương khác nhau cho các hàm không trơn; các khái niệm vectơ tiếp tuyến cấp 1, cấp 2; các điều kiện cần cấp 2 dạng nguyên thủy cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ không trơn có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập dưới ngôn ngữ đạo hàm theo phương cấp 2 Palés–Zeidan.
Chương 2 "Điều kiện cần cấp 2 dạng đối ngẫu" trình bày các điều kiện cần Fritz John cấp 2 dạng đối ngẫu cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ không trơn có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập. Với điều kiện chính quy cấp 2 thích hợp, điều kiện cần Karush–Kuhn–Tucker dạng đối ngẫu dưới ngôn ngữ đạo hàm theo phương cấp 2 Palés–Zeidan được chứng minh.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đỗ Văn Lưu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán, nhà trường và các phòng chức năng của trường, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn anh chị em trong lớp cao học và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 05 tháng 8 năm 2018

Tác giả luận văn

Vũ Mạnh Hùng

Chương 1

Điều kiện cần cấp hai dạng nguyên thủy cho nghiệm hữu hiệu yếu

Chương 1 trình bày các khái niệm đạo hàm cấp 1, cấp 2 cho các hàm trơn và không trơn; các khái niệm vectơ tiếp tuyên cấp 1 và cấp 2; các điều kiện cần cấp 2 dạng nguyên thủy cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 6, 7, 8].

1.1. Các kiến thức chuẩn bị

Mục này trình bày các khái niệm đạo hàm cấp 1 và cấp 2 theo phương cho các hàm không trơn, các khái niệm vectơ tiếp tuyến cấp 1, cấp 2 và ví dụ minh họa.

Giả sử X là không gian Banach thực, f là hàm giá trị thực xác định trên X, Lipschitz ở gần $\bar{x} \in X$. Nhắc lại khái niệm đạo hàm suy rộng Clarke (xem [2]) và Đạo hàm theo phương suy rộng Palés-Zeidan cấp 2 (xem [8]).

Định nghĩa 1.1

Đạo hàm suy rộng Clarke của f tại $\bar{x} \in X$ theo phương $v \in X$ được định nghĩa bởi

$$f^0(\bar{x}; v) := \limsup_{x \to \bar{x}, t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Định nghĩa 1.2

Đạo hàm theo phương suy rộng trên Palés-Zeidan cấp 2 của f tại $\bar{x}$ theo phương v (xem [8]) được định nghĩa bởi

$$f^{00}(\bar{x}; v) := \limsup_{t \downarrow 0} 2\frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) - tf^0(\bar{x}; v)}{t^2}.$$

Định nghĩa 1.3

Ánh xạ F từ X vào không gian định chuẩn Y được gọi là khả vi Fréchet tại $\overline{x}$ nếu tồn tại toán tử tuyến tính liên tục $\Lambda : X \to Y$ sao cho với mọi v trong một lân cận của $\overline{x}$,

$$F(\overline{x} + v) = F(\overline{x}) + \Lambda v + \alpha(v)\|v\|,$$

trong đó

$$\lim_{\|v\| \to 0} \|\alpha(v)\| = 0.$$

Toán tử Λ được gọi là đạo hàm Fréchet của F tại $\overline{x}$ và kí hiệu là $\nabla F(\overline{x})$.

Định nghĩa 1.4

Giả sử ánh xạ F khả vi liên tục Fréchet trong một lân cận của $\overline{x} \in X$. Ánh xạ F được gọi là khả vi Fréchet cấp 2 tại $\overline{x}$, nếu tồn tại ánh xạ song tuyến tính đối xứng $B : X \times X \to Y$ sao cho

$$F(\overline{x} + v) = F(\overline{x}) + \nabla F(\overline{x})v + \frac{1}{2}B(v, v) + r(v),$$

trong đó $||r(v)||/||v||^2 \to 0$ khi $||v|| \to 0$.

Dạng toàn phương B(v,v) được gọi là Hessian (hay đạo hàm Fréchet cấp 2) của F tại $\overline{x}$, và ký hiệu là $\nabla^2 F(\overline{x})$.

Định nghĩa 1.5

Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi Fréchet tại $\bar{x} \in X$, và $\nabla f(\bar{x})$ là đạo hàm Fréchet của f tại $\bar{x}$. Giới hạn sau được gọi là đạo hàm cấp 2 của f tại $\bar{x}$ theo phương $v \in \mathbb{R}^n$

$$f''(\bar{x}; v) := \limsup_{t \downarrow 0} 2\frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) - t\nabla f(\bar{x})v}{t^2}.$$

Nhận xét 1.1

(a) Nếu f khả vi liên tục Fréchet ở gần $\bar{x}$ với đạo hàm Fréchet $\nabla f(\bar{x})$ thì f Lipschitz ở gần $\bar{x}$, và $f^0(\bar{x}; v) = \nabla f(\bar{x})v$ $(\forall v \in X)$. Điều này không xảy ra khi $\nabla f(x)$ không liên tục tại $\bar{x}$.

(b) Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục Fréchet ở gần $\bar{x}$ và khả vi theo phương cấp 2 tại $\bar{x}$ theo phương $v \in X$, thì

$$f^{00}(\bar{x}; v) = f''(\bar{x}; v).$$

Giả sử f là một ánh xạ từ X vào không gian định chuẩn Y.

Định nghĩa 1.6

Ánh xạ f được gọi là khả vi Gâteaux tại $\overline{x}$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục Λ_1 từ X vào Y sao cho:

$$f(\overline{x} + tv) = f(\overline{x}) + t\Lambda_1(v) + o(t) \quad (\forall v \in X),$$

trong đó $\|o(t)\| / |t| \to 0$ khi $t \to 0$. Ánh xạ Λ_1 được gọi là đạo hàm Gâteaux của f tại $\overline{x}$ và kí hiệu là $f'(\overline{x})$.

Chú ý rằng một ánh xạ khả vi Gâteaux tại $\overline{x}$ có thể không liên tục tại $\bar{x}$.

Định nghĩa 1.7

Ánh xạ f là khả vi Gâteaux hai lần tại $\overline{x}$ nếu f khả vi Gâteaux tại $\overline{x}$ và tồn tại ánh xạ song tuyến tính đối xứng liên tục Λ_2 từ $X \times X$ vào Y sao cho